ORIGENES DEL PENSAMIENTO BORROSO

- Lotfi Zadeh **(1965)** ***La Teoría de los Conjuntos Borrosos***
  - los valores lógicos se corresponden a términos lingüísticos como a medias, bastante, casi, poco, mucho, algo, etc.
  - permite plantear el problema en los mismos términos en los que lo haría un experto humano.

LOGICA DE PROPOSICIONES

- ***variables*: las variables proposicionales son meros enunciados declarativos, p.e.:"hoy es martes"**
- ***conectivas*:**

  $\neg$ negación

  $\wedge$ conjunción

  $\vee$ disyunción

  $\Rightarrow$ condicional

  $\Leftrightarrow$ bicondicional

LOGICA DE PROPOSICIONES

- ***reglas operativas*:**
  - la regla fundamental es la operación de sustitución por la que una variable proposicional se sustituye por una sentencia.
  - Se podrían definir otras reglas como
    - unión (si A y B son tesis entonces AvB es tesis)
    - separación (si A es tesis y A$\wedge$B es tesis entonces B es tesis).
- ***valores semánticos* : {verdadero,falso} o bien {1,0}**

LOGICA DE PROPOSICIONES

- ***operaciones semánticas*: son las operaciones conocidas del Álgebra de Boole**

$$\neg 0 = 1 \qquad \neg 1 = 0$$
$$0 \wedge 0 = 0 \qquad 0 \wedge 1 = 0 \qquad 1 \wedge 0 = 0 \qquad 1 \wedge 1 = 1$$
$$0 \vee 0 = 0 \qquad 0 \vee 1 = 1 \qquad 1 \vee 0 = 1 \qquad 1 \vee 1 = 1$$
$$(0 \Rightarrow 0) = 1 \quad (0 \Rightarrow 1) = 1 \quad (1 \Rightarrow 0) = 0 \quad (1 \Rightarrow 1) = 1$$
$$(0 \Leftrightarrow 0) = 1 \quad (0 \Leftrightarrow 1) = 0 \quad (1 \Leftrightarrow 0) = 0 \quad (1 \Leftrightarrow 1) = 1$$

LOGICA DE PREDICADOS

- **Formaliza el concepto de propiedad ("Alberto es un ser vivo") y el de relación ("Juan vive en Madrid")**
- ***Variables*:**
  - colectivos("los peces","los seres vivos"), con la notación usual x,y,z para los miembros genéricos del colectivo, denominadas *variables* propiamente dichas.
    - *universo del discurso*: conjunto de posibles valores particulares que pueden tomar las variables
  - miembros("Juan","Madrid"), con la notación usual a,b,c, denominadas *constantes*

LOGICA DE PREDICADOS

- ***conectivas*:**
  - las de la lógica de proposiciones
  - propiedad: da lugar a un *predicado monádico*
    - "Alberto es un ser vivo": S(a)
  - relación: da lugar a un *predicado poliádico*
    - "Juan vive en Madrid": V(j,m)
  - *cuantificador universal* ∀
    - formaliza la idea de "para todo elemento ... se verifica ..."
  - *cuantificador existencial* ∃
    - formaliza la idea de "existe un elemento ... tal que ..."

LOGICA DE PREDICADOS

- Axiomas

$$(p \vee p) \Rightarrow p$$

$$q \Rightarrow (p \vee q)$$

$$(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$$

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(r \vee p) \Rightarrow (r \vee q)]$$

$$\forall x\,(P(x)) \Rightarrow P(a)$$

$$\forall x\,(p \Rightarrow P(x)) \Rightarrow (p \Rightarrow \forall x\,P(x))$$

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Conjuntos Borrosos

- **Un *subconjunto borroso* A de un universo X={x} es un conjunto de pares ordenados**

A={(x ;«(x)) ? xČX},

donde

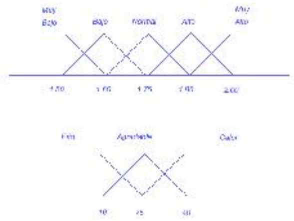
«$_A$:X ì [0,1]

es la *función de pertenencia* característica de A

- **grado de compatibilidad de un cierto predicado**
- **grado de posibilidad de que éste sea cierto**

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Conjuntos Borrosos



Conjuntos Borrosos

- **operaciones básicas**

igualdad	$A = B \Leftrightarrow \forall x \in X \ \text{«}_A(x) = \text{«}_B(x)$
inclusión	$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in X \ \text{«}_A(x) \leq \text{«}_B(x)$
unión	$\text{«}_{A \cup B}(x) = \max(\text{«}_A(x), \text{«}_A(x)) \ \forall x \in X$
intersección	$\text{«}_{A \cap B}(x) = \min(\text{«}_A(x), \text{«}_A(x)) \ \forall x \in X$
complemento	$A = \overline{B} \Leftrightarrow \forall x \in X \ \text{«}_A(x) = 1 - \text{«}_B(x)$

- **Se pueden definir otras operaciones de unión e intersección**
  - En vez de max suma acotada por la unidad
  - En vez de min también se utiliza producto
- **operaciones adicionales: producto, potenciación, distancia, etc.**

Conjuntos Borrosos

- **Los conjuntos clásicos se pueden considerar un caso particular de los conjuntos borrosos, en los que la función de pertenencia toma exclusivamente valores 0 ó 1**
- ***conjunto vacío*** c **: será aquel cuya función de pertenencia sea constante e igual a cero**
- ***conjunto completo*** **(el universo X) : el que tiene función de pertenencia constante e igual a uno.**

LOGICA BORROSA

- Semántica Borrosa
  - *valores semánticos*: subconjuntos borrosos, siendo necesario definir para cada predicado los correspondientes subconjuntos
  - *universo de discurso*: conjunto de posibles valores particulares que pueden tomar las variables que intervienen en el predicado
  - *etiquetas lingüísticas* los valores semánticos correspondientes a un predicado (del orden de 7)
  - *funciones de pertenencia* de un término lingüístico: cada término lingüístico corresponde a un subconjunto borroso que lleva asociada una función de pertenencia. Esta representa el grado de asociación de un valor numérico x con ese término.

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL — UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Controladores PID borrosos

- Equivalentes a los PID convencionales

$$u(t) = K_R\left[e(t) + \frac{1}{T_I}\int_{-\infty}^{t} e(\tau)\,d\tau + T_D\frac{de(t)}{dt}\right]$$

$$u_k - u_{k-1} = q_0 e_k + q_1 e_{k-1} + q_2 e_{k-2}$$

  - e(t): **función de error**
  - se(t): **función integral o suma del error**
  - ce(t): **función derivada o cambio en el error**
  - u(t): **función de control**
  - cu(t): **cambio en la función de control**

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL — UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

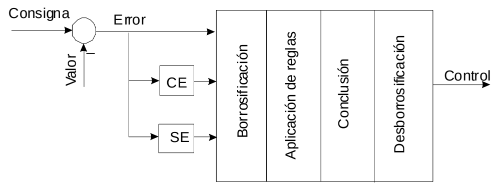
Controladores PID borrosos

- FP
  - $u(t)=f_1(e(t))$
- FPI
  - $u(t)=f_2(e(t),se(t))$
  - $cu(t)=f_2(ce(t),e(t))$
- FPD
  - $u(t)=f_3(e(t),ce(t))$
- FPID
  - $u(t)=f_4(e(t),ce(t),se(t))$

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL — UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

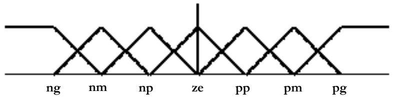
Controladores PID borrosos

- Estructura



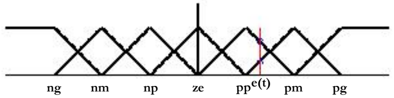
Controladores PID borrosos

- **fuzzyfication (borrosificación)**
  - obtener, a partir de los valores deterministas de E, SE y CE, sus equivalentes valores borrosos.
  - es preciso tener definidos
    - el universo de discurso
    - las etiquetas lingüísticas
    - la función de pertenencia asociada a cada una de ellas



Controladores PID borrosos

- ***borrosificación***
  - consiste en calcular el grado de pertenencia de las variables de entrada a cada una de las etiquetas lingüísticas mediante las funciones de pertenencia. Este será un número comprendido entre 0 y 1 para cada etiqueta.



Controladores PID borrosos

- **Forma de las funciones de pertenencia**
  - Trapezoidales
    - Pueden derivar en rectangulares o en triangulares
  - Rectangulares
    - Corresponden a los conjuntos clásicos
  - Exponenciales (distribución normal)
    - muestran un comportamiento muy adecuado y no presentan discontinuidad en la derivada, aunque tienen el inconveniente de su lentitud de cálculo
  - Polinómicas
    - son funciones sencillas de calcular y tienen una forma similar a la de las funciones de densidad normales, siendo más rápidas de calcular.

Controladores PID borrosos

- Planteamiento de las reglas (p.e. PI)
  - IF E = ZE AND CE = ZE THEN CU = ZE
  - IF E = PG AND CE = NP THEN CU = PP
  - ...
- Tabla de reglas

		CE				
		ng	np	ze	pp	pg
E	ng	ng	ng	ng	np	np
	np	ng	np	np	np	ze
	ze	np	np	ze	pp	pp
	pp	ze	pp	pp	pp	pg
	pg	pp	pp	pg	pg	pg

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Controladores PID borrosos

- **Selección de reglas**
  - Después de la borrosificación, para cada etiqueta lingüística tenemos un grado de pertenencia de E y otro de CE.
  - Construir una tabla adicional o matriz de inferencia que represente el peso que tendrá cada una de las reglas en la conclusión final.
  - Al ser reglas del tipo

    IF E = .. AND CE = .. THEN ...

    el grado de cumplimiento de la premisa será el menor de cada una de sus condiciones y se toma este grado como peso en la conclusión final.

    $m_{ij} = \min(\mu_i(e(t)), \mu_j(ce(t)))$
  - Se pueden eliminar reglas con bajo peso

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Controladores PID borrosos

- **Aplicación de Reglas. Conclusión borrosa.**
  - La acción de control que concluye cada regla es una etiqueta lingüística de la variable de control (conjunto borroso) al que se le dado un peso
- **Interpretación de la conclusión de una regla**
  - otro conjunto borroso con función de pertenencia producto del peso por la función de pertenencia primitiva

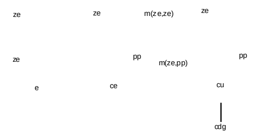
    $$\text{«}'_{ij}(u(t)) = m_{ij} \cdot \text{«}_k(u(t))$$
- **Conclusión del conjunto de reglas**
  - conjunto de conjuntos borrosos con sus respectivas funciones de pertenencia

Controladores PID borrosos

- **Defuzzyfication. Conclusión numérica.**
  - A partir del conjunto de funciones de pertenencia de salida, se procede al cálculo del valor numérico de la conclusión.
  - métodos:
    - tomar como valor para la variable de control el correspondiente al máximo de la curva suma de todas las funciones de pertenencia
- **calcular el centro de gravedad del área de la curva suma (o punto que deja el mismo área a ambos lados del mismo)**
  - en este caso no importa la forma de las funciones de pertenencia de las etiquetas lingüísticas de la función de control. Únicamente su centro de gravedad y su área, que normalmente será unitaria.

$$cdg = \frac{\sum_i \sum_j c_{ij} m_{ij}}{\sum_i \sum_j m_{ij}}$$

Controladores PID borrosos



Controladores PID borrosos

- FP

  IF E = ... THEN U=...
- FPI

  IF E = ... AND SE=... THEN U=...

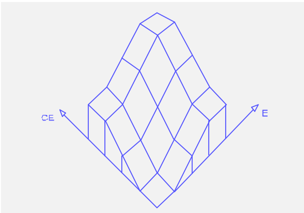
  IF E = ... AND CE = ... THEN CU=...
- FPD

  IF E = ... AND CE = ... THEN U=...
- FPID

  IF E = ... AND CE = ... AND SE=... THEN U=...

Controladores PID borrosos

- La relación entrada-salida no es borrosa



Modelado Borroso

- Obtener un modelo borroso de un sistema dinámico
  - Modelo de la planta
  - Modelo del regulador
- Tipos de modelos
  - Mamdani
  - Takagi-Sugeno

Modelado Borroso

- Modelo de Mamdani
  - Supuesto un sistema

$$x^{(n)} = f(x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}, u)$$

  - Se modela como un conjunto de reglas de la forma

$$Si\ x\ es\ M_0^{i_0}\ y\ x'\ es\ M_1^{i_1}\ y \dots y\ x^{(n-1)}\ es\ M_{n-1}^{i_{n-1}}\ y\ u\ es\ M_u^{i_u}$$
$$entonces\ \ x^{(n)}\ es\ M_n^{i_n}$$

Modelado Borroso

- Modelo de Takagi-Sugeno
  - Dado el sistema

$$x' = f(x,u)$$

$$x = (x_1\ x_2 \ldots x_n)^t \quad u = (u_1\ u_2 \ldots u_m)^t$$

  - Se modela como un conjunto de reglas de la forma

$$Si\ x_1\ es\ M_1^{i_1}\ y\ x_2\ es\ M_2^{i_2}\ y \ldots y\ x_n\ es\ M_n^{i_n}$$

$$entonces \quad x' = a_0^{i_1 i_2 \ldots i_n} + A^{i_1 i_2 \ldots i_n} x + B^{i_1 i_2 \ldots i_n} u$$

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL — UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Modelado Borroso

- Modelo de Takagi-Sugeno
  - Aplicable a control de sistemas no lineales
    - Se obtiene el modelo linealizando en distintos puntos
    - A cada regla del modelo se le asocia una regla del controlador

$$Si\ x_1\ es\ M_1^{i_1}\ y\ x_2\ es\ M_2^{i_2}\ y \ldots y\ x_n\ es\ M_n^{i_n}$$

$$entonces\ \ u = k_0^{i_1 i_2 \ldots i_n} + K^{i_1 i_2 \ldots i_n} x$$

    - k_0 se puede utilizar para eliminar el término independiente

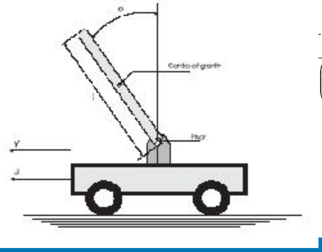
$$a_0^{i_1 i_2 \ldots i_n} + B^{i_1 i_2 \ldots i_n} k^{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0$$

    - La matriz de realimentación se puede diseñar por cualquier método, p.e. mediante LQR
  - Es un refinamiento del Control Adaptativo por tabla de reguladores

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL — UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Ejemplo

- Control de un péndulo invertido



$$\frac{-\cos\ddot{}\left(\dfrac{u + ml\ddot{}^{\,2}\,\mathrm{sen}\,\ddot{}}{M+m}\right)}{\left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{m\cos^2\ddot{}}{M+m}\right)}$$

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL — UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Ejemplo

- Modelo de estado

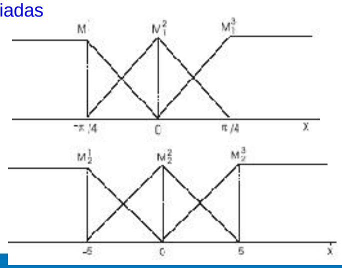
$$x_1 = \ddot{} \qquad x_1' = x_2$$

$$x_2 = \dot{}\dot{} \qquad x_2' = \frac{g \operatorname{sen} x_1 - \cos x_1 \left(\dfrac{u + ml\, x_2^{\,2} \operatorname{sen} x_1}{M+m} \right)}{l \left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{m \cos^2 x_1}{M+m} \right)}$$

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL — UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Ejemplo

- Puntos de linealización y funciones de pertenencia asociadas



ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL — UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Ejemplo

- Modelo de Takagi-Sugeno

$R^{11}:$ *si* x_1 *es* M_1^1 *y* x_2 *es* M_2^1 *entonces* $x_2' = -11.92 + 10.06x_1 - 0.35x_2 - u$

$R^{12}:$ *si* x_1 *es* M_1^1 *y* x_2 *es* M_2^2 *entonces* $x_2' = -10.76 + 10x_1 - u$

$R^{13}:$ *si* x_1 *es* M_1^1 *y* x_2 *es* M_2^3 *entonces* $x_2' = -11.36 + 10.06x_1 + 0.35x_2 - u$

$R^{21}:$ *si* x_1 *es* M_1^2 *y* x_2 *es* M_2^1 *entonces* $x_2' = 13.95x_1 - 1.46u$

$R^{22}:$ *si* x_1 *es* M_1^2 *y* x_2 *es* M_2^2 *entonces* $x_2' = 15.78x_1 - 1.46u$

$R^{23}:$ *si* x_1 *es* M_1^2 *y* x_2 *es* M_2^3 *entonces* $x_2' = 13.95x_1 - 1.46u$

$R^{31}:$ *si* x_1 *es* M_1^3 *y* x_2 *es* M_2^1 *entonces* $x_2' = 11.37 + 10.06x_1 - 0.35x_2 - u$

$R^{32}:$ *si* x_1 *es* M_1^3 *y* x_2 *es* M_2^2 *entonces* $x_2' = 10.76 + 10x_1 - u$

$R^{33}:$ *si* x_1 *es* M_1^3 *y* x_2 *es* M_2^3 *entonces* $x_2' = 11.92 + 10.06x_1 + 0.35x_2 - u$

Ejemplo

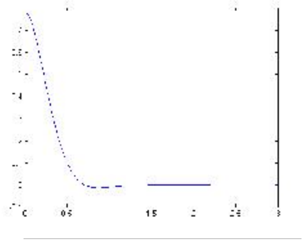
- Control LQR

$$R^{11}: \quad u(t) = -11.9200 + 24.2446x_1 + 7.3058x_2$$
$$R^{12}: \quad u(t) = -10.7600 + 24.1421x_1 + 7.6344x_2$$
$$R^{13}: \quad u(t) = -11.3600 + 24.2446x_1 + 8.0058x_2$$
$$R^{21}: \quad u(t) = 23.3857x_1 + 6.4835x_2$$
$$R^{22}: \quad u(t) = 25.5329x_1 + 6.7065x_2$$
$$R^{23}: \quad u(t) = 23.3857x_1 + 6.4835x_2$$
$$R^{31}: \quad u(t) = 11.3700 + 24.2446\, x_1 + 7.3058x_2$$
$$R^{32}: \quad u(t) = 10.7600 + 24.1421\, x_1 + 7.6344x_2$$
$$R^{33}: \quad u(t) = 11.9200 + 24.2446x_1 + 8.0058x_2$$

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Ejemplo

- Respuesta a estado inicial no nulo



ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Herramientas de desarrollo

- Varias herramientas
  - Fuzzy Logic toolbox de Matlab. The MathWorks